Holomorphic Mappings into Hyperbolic Complex Analytic Spaces (双曲型複素解析空間への正則写像)

氏名・(本籍)	浦(うら) 田(た) 敏(とし) 夫(お)
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 第 686 号
学位授与年月日	昭和57年2月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和45年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Holomorphic Mappings into Hyperbolic Complex Analytic Spaces（双曲型複素解析空間への正則写像）
論文審査委員	（主査） 教授 黒田 正　教授 小田忠雄 教授 小竹 武

論 文 目 次

論 文 内 容 要 旨

Gauss平面の単位円板はPoincaré-Bergman計量に関して負定値Gauss曲率を持つ。この事実は有界正則関数のSchwarzの補題, Montelの定理, Picardの定理, Blochの定理, Riemannの写像定理等に反映している。

H. GrauertとH. Reckziegelはエルミット複素多様体Mの正則断面曲率が負の一定値で上から抑られる時複素多様体NからMへの正則写像の集合Hol(N, M)上のコンパクト・開位相が規制される事を示した。S. KobayashiはSchwarzの補題の一般化の可能性に基いて複素多様体上の不変擬距離, いわゆるKobayashi擬距離, を定義し双曲型複素多様体の研究を行っている。W. Kaupは複素解析空間の間の正則写像の正規族の研究を行い, H. Wuもtautな複素多様体への正則写像について多くの事実を示した。これ等の研究において負の正則断面曲率を持つエルミット複素多様体はその存在と数学的構造の含蓄の故に双曲型複素多様体の研究の中心に位置している。

§1. M. H. KwackはPicardの定理の拡張に関連して, 複素多様体Xの余次元1以上の複素解析的集合Aの外部X－Aで定義されたコンパクトな双曲型複素解析空間Mへの正則写像はX上へ正則に延長される事を証明した。本論文ではまずこれを基礎としてtautな複素解析空間への有理型写像を研究する。Xを複素解析空間, Yをtautな複素解析空間, $f : X \to Y$を(Remmertの意味での)有理型写像とする。Xの特異点の解消$\tilde{X} \xrightarrow[\pi]{} X$をとると, Kwackの定理を用いて正則写像$\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$を$\tilde{X}$のZariski開集合の上で$\tilde{f} = f \circ \pi$となる様にとれる。この故に, XからYへの有理型写像の存在に関する問題を$\tilde{X}$からYへの正則写像の問題としてとらえる事が出来る。この場合, $\tilde{X}$についての条件は一般であるが, 次の様なXの固有改変の存在が証明される。

定理. Xを連結複素解析空間とする。その時Sg(X)を中心とするXの固有改変$M(X) \xrightarrow[\pi_X]{} X$が(複素解析的同型を除いて)一意的に存在して次の条件を満す：

(1) M(X)は正規である。

(2) 複素解析空間Yへの任意のT－有理型写像$f : X \to Y$(§1参照)に対して, 正則写像$\tilde{f} : M(X) \to Y$が存在して$\tilde{f} = f \circ \pi$がM(X)のZariski開集合の上で成立する。

この定理の証明の道具はH. Cartanによる複素解析空間の商空間の存在定理, Kwackの定理, 複素解析空間の特異点の解消の存在の事実である。さて, Xがtautであれば, M(X)もtautである事がわかるから, 次の命題が得られる：

命題. Xをn次元の既約でtautな複素解析空間とする。その時XからYへの双有理型写像の群$Aut_m(X)$は実Lie群の構造を許し, $\dim_R Aut_m(X) \leqq 2n + n^2$である。特にXがコンパクトな時, $Aut_m(X)$は有限群である。

命題. Xをコンパクトな既約複素解析空間，AをXの全疎複素解析集合とする。$X-A$からコンパクトでtautな複素解析空間Yへの有限なファイバーを持つ正則写像が存在すれば，Xはtautな複素解析空間と双有理型である。

§2. X, Y, Vを複素解析空間とし，次の消去問題(*)を考える：

(*)複素解析的直積$X \times V$と$Y \times V$が互に正則同型ならば，XとYは互に正則同型であるか。

J. BrunはX, Yが複素多様体，Vが複素射影空間(P_nC)又は種数$g \geqq 2$のコンパクトなRiemann面又は(C^nの)有界対称領域D等の場合，上の問題は肯定的に解ける事を示した。ところで，問題(*)に対して次の事実が示される。

定理. (*)において，Vが双曲型であれば，XとYは互に正則同型である。

定理. (*)において，X, Y, Vはコンパクトかつ既約とし，Vは一般型とする。この時XとYは互に正則同型である。

さて，正次元複素解析空間Xがどんな正次元複素解析空間A, Bの直積とも正則同型になり得ない時，Xはprimaryであると言う事にする。Xが正次元のprimary複素解析空間X_1，……，X_nの直積$X_1 \times \cdots\cdots \times X_n$と正則同型である時，直積$X_1 \times \cdots\cdots \times X_n$を$X$のprimary分解という。この時双曲型複素解析空間，一般型のコンパクト複素解析空間は一意的なprimary分解を持つという事実が示される。この場合$X \cong X_1 \times \cdots\cdots \times X_n$をprimary分解とすると，$X$の正則自己同型群$\mathrm{Aut}(X)$は$\mathrm{Aut}(X_1) \times \cdots\cdots \times \mathrm{Aut}(X_n)$と，$X$のprimary分解$X_1 \times \cdots\cdots \times X_n$によって決定される$\{X_1, \cdots\cdots, X_n\}$上の置換群($\subset \mathrm{Aut}(X)$)との半直積として表現されることがわかる。これはH. Cartanによる(複素ユークリッド空間の)有界領域の直積の正則自己同型写像の分解の一般化である(部分的にはK. Petersによっても証明された。)

§3. ここでは次の定理を証明し，§4においてこれを応用する。

定理. Xをコンパクトな連結複素解析空間，Yをtautな複素解析空間とする。この時任意のx_0 (εX)とy_0 (εY)に対して

$$\{f \varepsilon \mathrm{Hol}(X, Y) ; f(x_0) = y_0\}$$

は有限集合である。

定理. Xをコンパクトな連結複素解析空間，Yをコンパクトでtautな複素解析空間とする。この時

$$\{f \varepsilon \mathrm{Hol}(X, Y) ; f(X) = Y, {}^{\forall} y \varepsilon Y \text{ に対して } f^{-1}(y) \text{ は連結}\}$$

は有限集合である。

§4. Rを種数$g \geqq 2$のコンパクトなリーマン面とする。この時Rは双曲型である。Xを任意のコンパクトな連結複素多様体とすると，

$\{f \varepsilon \mathrm{Hol}(X, R) ; f(X)=R\}$は有限集合である(de Franchis). S. Lang, S. Kobayashi は次の予想を提出した： コンパクトな双曲型複素解析空間 Y へのコンパクトな連結複素解析空間 X からの正則全射は高々有限個しか存在しない。 この予想に関連して，Kobayashi－Ochiai は任意のコンパクトな既約複素解析空間 X から一般型のコンパクトな複素解析空間 Y の上への有理型写像は高々有限個しか存在しない事を示している。

X をコンパクトな連結複素解析空間とすると，X から連結複素解析空間 Y への正則写像全体の集合 Hol(X, Y) は普遍的複素構造を許す，但し Hol(X, Y) の位相はコンパクト・開位相である。Y をコンパクトかつ双曲的とすると，

$S=\{f \varepsilon \mathrm{Hol}(X, Y) ; f(X)=Y\}$は Hol(X, Y) のコンパクトな部分複素解析空間である。この場合 $\dim_c S>0$ であれば，Y の正則接空間 T(Y) のコンパクトな複素解析的集合 Γ で，次の条件を満たすものが存在する：

(1) Γ は $\pi : T(Y) \to Y$ の零切断に含まれない。

(2) $\pi | \Gamma ; \Gamma \to Y$ は全射である。

今，(Y, ds^2) はコンパクトなエルミット複素多様体で，その正則断面曲率は Y 上負であるとする。この時，正則ベクトル場に対する局所積分曲線が存在することと，Y の部分複素多様体上に (Y, ds^2) から誘導されたエルミット計量の正則断面曲率が負であるという事実から，T(Y) のコンパクトな複素解析的集合 Γ で上の条件(1), (2)を満たすものが存在し得ない事が示される。

故に，

系．Y を正則断面曲率が負となるコンパクトなエルミット複素多様体とすると，任意のコンパクトな連結複素解析空間 X から Y への正則全射は高々有限個しか存在しない。

さて Y をコンパクトな Corathéodory－双曲型複素解析空間とすると，複素解析空間上の Carathéodory 計量の擬凸性から，条件(1), (2)を満たす $\Gamma(\subset T(Y))$ は存在しない事が示される。

定理．Y をコンパクトな Carathéodory－双曲型複素解析空間とする。この時任意のコンパクトな複素解析空間 X から Y への正則全射は高々有限個しか存在しない。

コンパクトな連結複素多様体 Y の正則接束 T(Y) が Grauert の意味で負の時，Y が双曲型である事が Brody の結果を用いて証明される。又 T(Y) の擬凸性から

定理．Y をコンパクトな連結複素多様体で T(Y) は Grauert の意味で負とする。この時任意のコンパクトな連結複素解析空間 X から Y への非定値正則写像は高々有限個しか存在しない。

例えば，C^3 の有界領域 D 上に不動点なしに作用する固有不連続群 G による商複素多様体 D/G は Garathéodory－双曲型である。この場合，D/G がコンパクトであれば，上の定理の結果は (D/G は一般型の複素多様体であるから) Kobayashi-Ochiai の結果に含まれている。一般に Carathéodory－双曲型(双曲型又は測度双曲型)であれば，コンパクトな複素多様体は一般型であるかどうかは今後に残された重要な問題の一つであろう。

論文審査の結果の要旨

複素平面上の単位開円板はそのポアンカレ計量について負定値ガウス曲率をもっており，この事実はいわゆるシュワルツの補題をはじめとして，一変数正則函数の多くの重要な性質に色濃く反映している。小林昭七はシュワルツの補題の一般化の可能性に基き，複素多様体上に不変擬距離を定義して，双曲型複素多様体の研究を行ったが，双曲型複素多様体は，その数学的構造の故に，研究対象としては甚だ興味あるものの一つである。

本論文では，複素多様体から上述のような双曲型複素多様体への解析写像の性質を調べることを手段として，双曲型複素多様体の性質を明らかにすることが試みられている。

まず，$f: X \to Y$ を連結な複素解析空間 X から複素解析空間 Y への T－有理型写像とする。このとき複素解析空間の商空間の存在定理および複素解析空間の特異点解消定理を用いることによって，X の固有改変 $M(X) \xrightarrow[\pi]{} X$ が一意的に定まって，M(X) のザリスキ開集合上で $\widetilde{f} = f \circ \pi$ となる正則写像 $\widetilde{f}: M(X) \to Y$ が存在することを示す。そしてこの結果の応用として，taut な複素解析空間についてのいくつかの興味ある結果を導いた。

ついで，複素解析空間の複素解析的直積 $X \times V$ と $Y \times V$ とが正則同型であれば，X と Y とが互いに正則同型になるであろうかという，いわゆる消去問題をとりあげ，V が双曲型であるならば，X と Y とは互いに正則同型であるという事実を証明し，また複素ユーリッド空間での有界領域の正則自己同型写像の分解に関するカルタンの定理の一つの一般化を与えている。

さらに，複素解析空間から他の複素解析空間への正則写像がつくる空間の構造を解析することにより，いわゆるラング・小林の予想に関連して，任意のコンパクトな複素解析空間からコンパクトなカラテオドリ双曲型複素解析空間への正則全射は高々有限個しかない事実を明らかにした。

これらの結果は双曲型複素多様体をめぐる諸問題のうち，重要ないくつかのものを解決し，さらに今後の研究への見透しを与えたものであって，注目すべき結果であるといえよう。

以上本論文は双曲型複素解析多様体の研究に寄与する所大きく，著者の豊かな研究能力を示しており，理学博士の学位論文として合格である。